

Conceptos: Suma, producto, división larga y casos de factorización.

1. Dados $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$ y $Q(x) = x^2 - 4x - 1$, halle $P(x) - 2Q(x)$.
2. Multiplique $(2x^2 - 3x + 1)(x - 2)$.
3. Realice la **división larga** de $(x^3 - 2x^2 + 4x - 3)$ entre $(x^2 + 1)$.
4. Factorice por término común: $6x^4y^2 - 9x^3y^3 + 3x^2y^4$.
5. Factorice el trinomio: $x^2 - 7x + 10$.
6. Factorice por agrupación: $ax + ay + bx + by$.
7. Factorice la diferencia de cuadrados: $16x^4 - 81$.
8. Use el producto notable para expandir $(2x - 3)^3$.
9. Factorice la suma de cubos: $x^3 + 27$.
10. Determine el grado y el coeficiente principal de $P(x) = -5x^4 + 2x^6 - x + 1$.

Conceptos: Regla de Ruffini, evaluación rápida y divisibilidad.

11. Use **división sintética** para hallar el cociente y el resto de $(2x^3 - 5x^2 + 3x - 7) \div (x - 2)$.
12. Según el **Teorema del Resto**, halle el residuo de dividir $P(x) = x^{100} - 1$ entre $(x + 1)$ sin hacer la división.
13. Use el **Teorema del Factor** para determinar si $(x - 3)$ es un factor de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
14. Halle el valor de k para que $(x + 2)$ sea un factor de $P(x) = kx^3 + 3x^2 - 4$.
15. Si $P(5) = 0$, ¿qué factor del polinomio conoces con seguridad?
16. Evalúe $P(-1)$ mediante división sintética para $P(x) = 4x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 8$.
17. Divida $(x^4 - 16) \div (x + 2)$ usando división sintética.
18. Encuentre un polinomio de grado 3 cuyos ceros sean 1, -2 y 5.
19. Demuestre que $(x - a)$ es factor de $(x^n - a^n)$ para cualquier n entero positivo.
20. ¿Qué sucede con el resto si el residuo de la división sintética es cero?

Conceptos: Ceros reales, raíces múltiples y gráficas.

21. Halle todas las raíces de $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.
22. Identifique la **multiplicidad** de cada raíz en $P(x) = (x - 1)^2(x + 3)^3(x - 5)$.
23. Si una raíz tiene multiplicidad 2, ¿qué le sucede a la gráfica del polinomio en ese punto del eje X ?
24. Escriba un polinomio de grado 4 que tenga a $x = 0$ como raíz de multiplicidad 3 y a $x = 2$ como raíz simple.
25. Encuentre las raíces de $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ (Sugerencia: use cambio de variable $u = x^2$).
26. Dada la gráfica de un polinomio que "rebota" en $x = -2$ y "cruza" en $x = 3$, proponga una posible ecuación.
27. Determine las raíces de $x^3 + x^2 - x - 1$.
28. ¿Cuántas raíces reales puede tener, como máximo, un polinomio de grado 5?
29. Halle los ceros de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
30. Factorice completamente $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ sabiendo que $x = 1$ es una raíz.

Conceptos: Raíces complejas conjugadas y conteo total de raíces.

31. Según el **Teorema Fundamental del Álgebra**, ¿cuántas raíces (reales o complejas) tiene $P(x) = x^7 - 4x^2 + 2$?
32. Si $2 + 3i$ es una raíz de un polinomio con coeficientes reales, ¿qué otra raíz debe tener obligatoriamente?
33. Halle todas las raíces de $P(x) = x^2 + 9$.
34. Encuentre un polinomio de grado 2 con coeficientes reales que tenga a $1 - i$ como raíz.
35. Factorice en los números complejos: $P(x) = x^2 - 2x + 5$.
36. Halle todas las raíces de $x^4 - 1 = 0$.
37. Demuestre que un polinomio de grado impar con coeficientes reales siempre tiene al menos una raíz real.
38. Halle las raíces complejas de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
39. Si un polinomio de grado 4 tiene raíces i y $2i$, escríbalo en su forma factorizada.
40. ¿Puede un polinomio de grado 3 tener exactamente 2 raíces complejas y 1 raíz real? Explique.

Conceptos: Cambios de signo, posibles raíces positivas/negativas y límites de raíces.

41. Use la **Regla de los Signos de Descartes** para determinar el número posible de raíces positivas de $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5$.
42. Para el mismo polinomio anterior, halle el número posible de raíces negativas evaluando $P(-x)$.
43. Determine el número de posibles raíces imaginarias de $P(x) = x^3 + x + 1$.
44. **Acotación:** Si al realizar la división sintética con $x = c$ (donde $c > 0$) todos los números de la última fila son no negativos, ¿qué podemos decir de c ?
45. Demuestre que $x = 4$ es una **cota superior** de las raíces de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$.
46. Demuestre que $x = -2$ es una **cota inferior** de las raíces de $P(x) = x^4 + 2x^3 - x - 3$ (Sugerencia: los signos deben alternar).
47. Use Descartes para $P(x) = x^5 + x^3 + x$. ¿Cuántas raíces reales positivas tiene?
48. Construya una tabla de posibilidades para las raíces (positivas, negativas, imaginarias) de $P(x) = 2x^4 - x^2 - 3$.
49. Si un polinomio no tiene cambios de signo, ¿puede tener raíces positivas?
50. Explique la utilidad de conocer las cotas superiores e inferiores al buscar raíces manualmente.

Conceptos: Teorema del Cero Racional (p/q) y búsqueda de ceros.

51. Use el **Teorema del Cero Racional** para listar todos los candidatos a raíces de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.
52. Del listado anterior, use división sintética para encontrar cuál es realmente una raíz.
53. Halle todas las raíces racionales de $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.
54. Si el coeficiente principal es 1, ¿cómo son siempre las posibles raíces racionales?
55. Encuentre los ceros de $P(x) = 3x^3 - x^2 - 3x + 1$.
56. Localización: Si $P(1) = -2$ y $P(2) = 5$, ¿qué garantiza el **Teorema del Valor Intermedio** sobre el intervalo $(1, 2)$?
57. Aproxime un cero de $P(x) = x^3 - x - 1$ entre $x = 1$ y $x = 2$.
58. Determine si $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ tiene raíces fraccionarias.
59. Factorice completamente $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ buscando primero sus ceros racionales.
60. Resuma los pasos que seguirías para encontrar todas las raíces de un polinomio de grado 4 desde cero.